

Méthodes d'évolution de front et fast marching Cours I

Jean-Marie Mirebeau¹, Da Chen²

¹University Paris Sud, CNRS, University Paris-Saclay

²CEREMADE, Université Paris-Dauphine

September 11, 2018

Ecole GeomData - Fréjus 2018

Introduction à la science des données géométriques.

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Géométries Isotropes

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions
Sismique

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes

Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des graphes

Schémas semi-Lagrangiens

Distance

Planification de mouvement

Shape from shading

Segmentation d'images

Riemann

Chemins minimaux sur une surface

Distance de Fisher-Rao

Finsler

Energies associées à des régions

Sismique

Géométries Isotropes

Planification de mouvement

Shape from shading

Segmentation d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface

Distance de Fisher-Rao

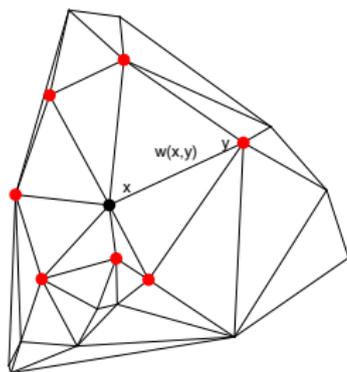
Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions

Sismique

Soit un graphe de:

- ▶ Sommets $X \sqcup \partial X$,
- ▶ Voisins $S(x) \subseteq X \sqcup \partial X$ pour tout $x \in X$,
- ▶ Poids d'arête $w(x, y) \in \mathbb{R}$ pour tout $y \in S(x)$.



Calcul

Le cas des graphes

Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

La distance U à ∂X satisfait le système, non-linéaire couplé:

$$\forall x \in X, U(x) = \Lambda U(x), \quad \forall x \in \partial X, U(x) = 0.$$

où

$$\Lambda U(x) := \min_{y \in S(x)} \left(w(x, y) + U(y) \right).$$

Résolution en une passe par Dijkstra

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Si les poids $w(x, y)$ sont **positifs**, alors le système précédent se résout en une passe.

Calcul

Le cas des graphes

Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de mouvement

Shape from shading

Segmentation d'images

Riemann

Chemins minimaux sur une surface

Distance de Fisher-Rao

Finsler

Energies associées à des régions

Sismique

Résolution en une passe par Dijkstra

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Si les poids $w(x, y)$ sont **positifs**, alors le système précédent se résout en une passe.

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Algorithme de Dijkstra

Initialiser $U = 0$ sur ∂X , $U = \infty$ sur X .

Tant que il reste un point non-accepté

Choisir celui qui minimise U , noté y , et le tagger accepté

Pour tout $x \in S[y]$ non-accepté

$$U(x) \leftarrow \min\{U(x), w(x, y) + U(y)\}.$$

Résolution en une passe par Dijkstra

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Si les poids $w(x, y)$ sont **positifs**, alors le système précédent se résout en une passe.

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Algorithme de Dijkstra

Initialiser $U = 0$ sur ∂X , $U = \infty$ sur X .

Tant que il reste un point non-accepté

Choisir celui qui minimise U , noté y , et le tagger accepté

Pour tout $x \in S[y]$ non-accepté

$$U(x) \leftarrow \min\{U(x), w(x, y) + U(y)\}.$$

► On a noté $S[y] := \{x; y \in S(x)\}$ les voisinages renversés.

Résolution en une passe par Dijkstra

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Si les poids $w(x, y)$ sont **positifs**, alors le système précédent se résout en une passe.

Algorithme de Dijkstra

Initialiser $U = 0$ sur ∂X , $U = \infty$ sur X .

Tant que il reste un point non-accepté

Choisir celui qui minimise U , noté y , et le tagger accepté

Pour tout $x \in S[y]$ non-accepté

$$U(x) \leftarrow \min\{U(x), w(x, y) + U(y)\}.$$

- ▶ On a noté $S[y] := \{x; y \in S(x)\}$ les voisinages renversés.
- ▶ Complexité, avec $E := \sqcup_{x \in X} S(x)$ est l'ensemble des arêtes

$$\mathcal{O}(M \ln N), \quad M = \#(E), \quad N = \#(X \cup \partial X).$$

Résolution itérative par Bellman-Ford

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

S'applique à des poids $w(x, y)$ de signe quelconque.

Calcul

Le cas des graphes

Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de mouvement

Shape from shading

Segmentation d'images

Riemann

Chemins minimaux sur une surface

Distance de Fisher-Rao

Finsler

Energies associées à des régions

Sismique

Résolution itérative par Bellman-Ford

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

S'applique à des poids $w(x, y)$ de signe quelconque.

Calcul

Le cas des
graphes

Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

Sismique

Algorithme de Bellman-Ford

Initialiser $U = 0$ sur ∂X , $U = \infty$ sur X .

Jusqu'à stabilisation de U

$$U \leftarrow \Lambda U \text{ sur } X$$

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

S'applique à des poids $w(x, y)$ de signe quelconque.

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Algorithme de Bellman-Ford

Initialiser $U = 0$ sur ∂X , $U = \infty$ sur X .

Jusqu'à stabilisation de U

$$U \leftarrow \Lambda U \text{ sur } X$$

- ▶ Termine en D itérations, le diamètre du graphe, en l'absence de cycles négatifs.

S'applique à des poids $w(x, y)$ de signe quelconque.

Calcul

Le cas des
graphes

Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

Sismique

Algorithme de Bellman-Ford

Initialiser $U = 0$ sur ∂X , $U = \infty$ sur X .

Jusqu'à stabilisation de U

$$U \leftarrow \Lambda U \text{ sur } X$$

- ▶ Termine en D itérations, le diamètre du graphe, en l'absence de cycles négatifs.
- ▶ Complexité, avec $M = \#(E)$ le nombre d'arêtes

$$\mathcal{O}(DM).$$

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

**Le cas des
graphes**

Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

Sismique

- Soit X un ensemble fini, et soit Λ un opérateur de $] - \infty, \infty]^X$ dans lui-même. Considérons le problème de point fixe:

Trouver $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\Lambda u = u$.

Généralisation des hypothèses

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

- Soit X un ensemble fini, et soit Λ un opérateur de $] -\infty, \infty]^X$ dans lui-même. Considérons le problème de point fixe:

Trouver $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\Lambda u = u$.

Interpretation: $\Lambda u(x)$ est le temps d'arrivée au point $x \in X$, estimé à l'aide des temps d'arrivée $u(y)$ en $y \neq x$.

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Généralisation des hypothèses

- ▶ Soit X un ensemble fini, et soit Λ un opérateur de $] - \infty, \infty]^X$ dans lui-même. Considérons le problème de point fixe:

Trouver $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\Lambda u = u$.

Interpretation: $\Lambda u(x)$ est le temps d'arrivée au point $x \in X$, estimé à l'aide des temps d'arrivée $u(y)$ en $y \neq x$.

- ▶ L'opérateur Λ est monotone ssi $\forall u, v : X \rightarrow] - \infty, \infty]$

$$u \leq v \Rightarrow \Lambda u \leq \Lambda v.$$

→ Principe de comparaison, résolution par itération de Λ .

Généralisation des hypothèses

- ▶ Soit X un ensemble fini, et soit Λ un opérateur de $] - \infty, \infty]^X$ dans lui-même. Considérons le problème de point fixe:

Trouver $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\Lambda u = u$.

Interpretation: $\Lambda u(x)$ est le temps d'arrivée au point $x \in X$, estimé à l'aide des temps d'arrivée $u(y)$ en $y \neq x$.

- ▶ L'opérateur Λ est monotone ssi $\forall u, v : X \rightarrow] - \infty, \infty]$

$$u \leq v \Rightarrow \Lambda u \leq \Lambda v.$$

→ Principe de comparaison, résolution par itération de Λ .

- ▶ L'opérateur Λ est causal ssi $\forall u, v : X \rightarrow] - \infty, \infty]$

$$u^{<\lambda} = v^{<\lambda} \Rightarrow (\Lambda u)^{\leq\lambda} = (\Lambda v)^{\leq\lambda},$$

où $u^{<\lambda}(x) = u(x)$ si $u(x) < \lambda$, et ∞ sinon.

→ Résolution en une passe par Dijkstra.

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes

Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des
graphes

**Schémas
semi-Lagrangiens**

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

Sismique

Géométries Isotropes

Planification de mouvement

Shape from shading

Segmentation d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface

Distance de Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions

Sismique

Contexte: Domaine Ω , métrique $\mathcal{F} : T\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ définissant

$$d_{\mathcal{F}}(x, y) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \mathcal{F}_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \quad \text{t.q.} \begin{cases} \gamma \in \text{Lip}_{\text{loc}}([0, 1], \overline{\Omega}) \\ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y. \end{cases}$$

Fast
Marching
Cours I

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes

**Schémas
semi-Lagrangiens**

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

Riemann

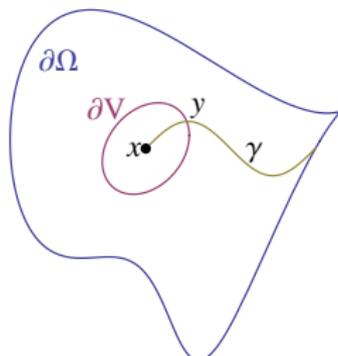
Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

Sismique



Calcul

Le cas des
graphes

**Schémas
semi-Lagrangiens**

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

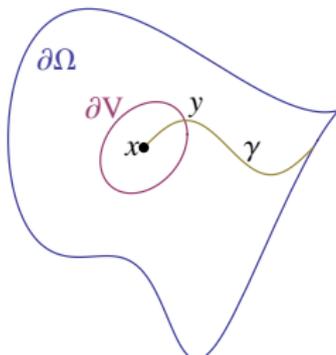
Sismique

Contexte: Domaine Ω , métrique $\mathcal{F} : T\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ définissant

$$d_{\mathcal{F}}(x, y) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \mathcal{F}_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \quad \text{t.q.} \begin{cases} \gamma \in \text{Lip}_{\text{loc}}([0, 1], \overline{\Omega}) \\ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y. \end{cases}$$

Objectif: Calculer numériquement le temps de sortie

$$u(x) = \min_{y \in \partial\Omega} d_{\mathcal{F}}(x, y).$$



Contexte: Domaine Ω , métrique $\mathcal{F} : T\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ définissant

$$d_{\mathcal{F}}(x, y) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \mathcal{F}_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt \quad \text{t.q.} \begin{cases} \gamma \in \text{Lip}_{\text{loc}}([0, 1], \overline{\Omega}) \\ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y. \end{cases}$$

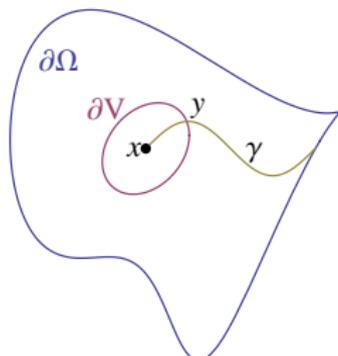
Objectif: Calculer numériquement le temps de sortie

$$u(x) = \min_{y \in \partial\Omega} d_{\mathcal{F}}(x, y).$$

Principe d'optimalité de Bellman

Pour tout voisinage V de x contenu dans Ω ,

$$u(x) = \min_{y \in \partial V} \left(d_{\mathcal{F}}(x, y) + u(y) \right).$$



Discrétisation: Ensembles finis X , ∂X approximant Ω , $\partial\Omega$.
Voisinage polyhédral $V(x)$ de chaque $x \in X$.

Calcul

Le cas des
graphes

**Schémas
semi-Lagrangiens**

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

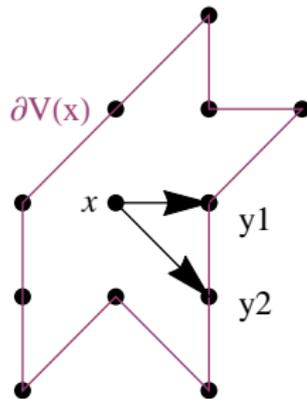
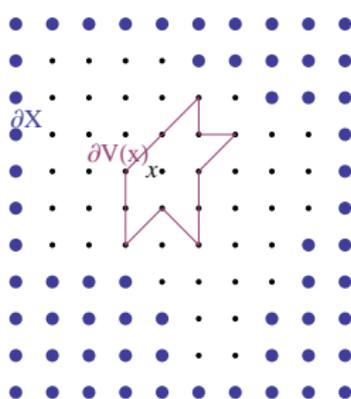
Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique



Discrétisation: Ensembles finis X , ∂X approximant Ω , $\partial\Omega$.
Voisinage polyhédral $V(x)$ de chaque $x \in X$.

Calcul

Le cas des
graphes

Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

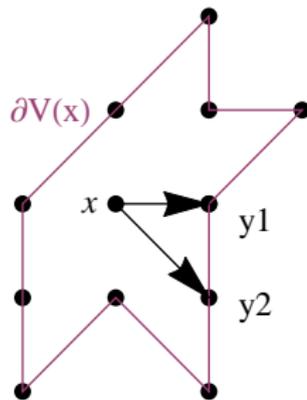
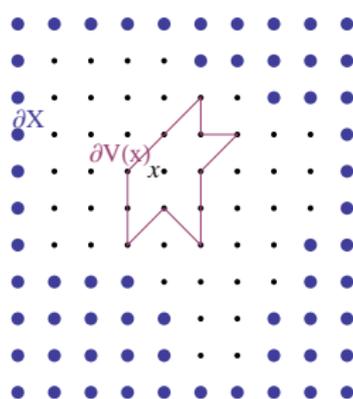
Energies
associées à des
régions

Sismique

Discrétisation semi-Lagrangienne

Trouver $U : X \cup \partial X \rightarrow \mathbb{R}$, nulle sur ∂X , et telle que $\forall x \in X$

$$U(x) = \min_{y \in \partial V(x)} \left(\mathcal{F}_x(y - x) + I_{V(x)} U(y) \right).$$



Propriétés de l'opérateur de Hopf-Lax

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

$$\Lambda U(x) = \min_{y \in \partial V(x)} \left(\mathcal{F}_x(y - x) + I_{V(x)} U(y) \right).$$

Calcul

Le cas des
graphes

**Schémas
semi-Lagrangiens**

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

Sismique

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

$$\Lambda U(x) = \min_{y \in \partial V(x)} \left(\mathcal{F}_x(y - x) + I_{V(x)} U(y) \right).$$

Calcul

Le cas des
graphes

Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

Sismique

► **Monotonie:** automatiquement satisfaite.

→ Résolution par itération de Λ , globale ou suivant un ordonnancement particulier de X : Fast sweeping Zhao 05, AGSI Bornemann 06.

$$\Lambda U(x) = \min_{y \in \partial V(x)} \left(\mathcal{F}_x(y - x) + I_{V(x)} U(y) \right).$$

Calcul

Le cas des
graphes

Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement

Shape from
shading

Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

Sismique

- **Monotonie:** automatiquement satisfaite.

→ Résolution par itération de Λ , globale ou suivant un ordonnancement particulier de X : Fast sweeping Zhao 05, AGSI Bornemann 06.

- **Causalité,** dans le cas isotrope $\mathcal{F}_x(v) = c(x)\|v\|$: satisfaite sous une condition d'angle aigu (Tsitsilikis, 95)

$$\langle y - x, z - x \rangle \geq 0,$$

pour tous $x \in X$, et tous sommets voisins y, z de $V(x)$.

→ Résolution en une passe par le fast marching.

Construction de $V(x)$ est non-triviale, Kimmel 98.

Fast
Marching
Cours I

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes

Schémas semi-Lagrangiens

Géométries Isotropes

Planification de mouvement

Shape from shading

Segmentation d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface

Distance de Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions

Sismique

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

**Planification de
mouvement**
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Géométries Isotropes

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions
Sismique

Planification de mouvement

- ▶ L'introduction d'un coût c dans la métrique $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\dot{\mathbf{p}}) = c(\mathbf{p})\|\dot{\mathbf{p}}\|$ pénalise la distance aux obstacles.

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

**Planification de
mouvement**

Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

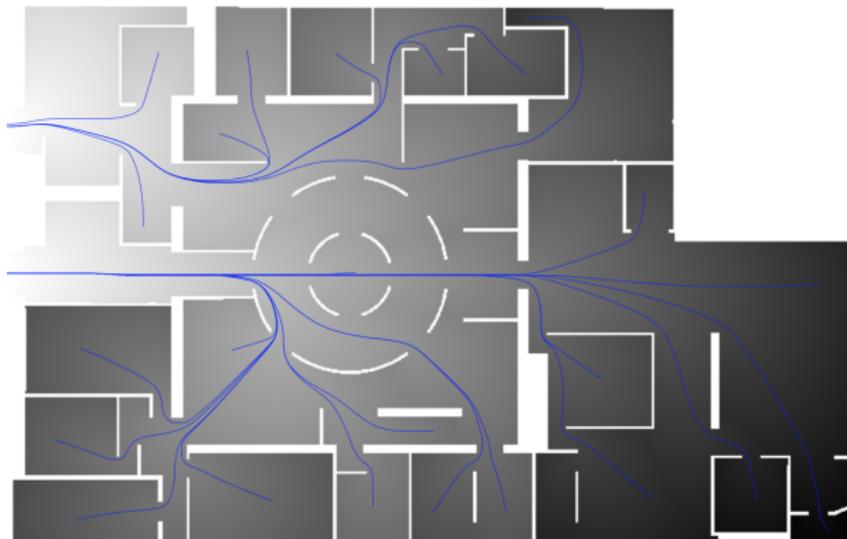


Figure: Sortie du centre Pompidou

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de mouvement

Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Planification de mouvement

- ▶ L'introduction d'un coût c dans la métrique $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\dot{\mathbf{p}}) = c(\mathbf{p})\|\dot{\mathbf{p}}\|$ pénalise la distance aux obstacles.
- ▶ Le problème du "déménagement de piano" est résolu en travaillant dans l'espace des configurations $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

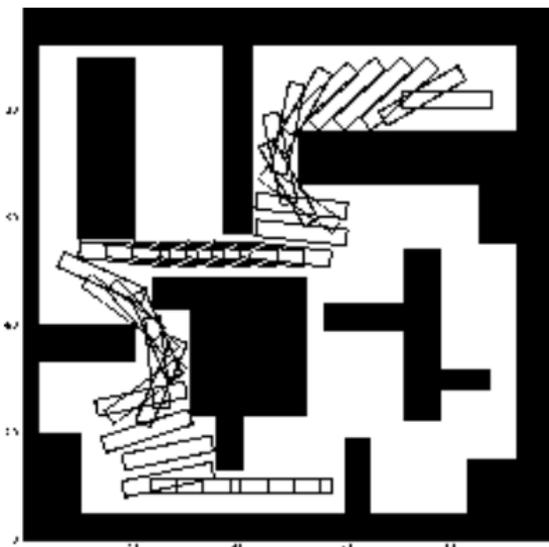


Figure: Credit J.A. Sethian

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Géométries Isotropes

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Distance

Planification de
mouvement
**Shape from
shading**
Segmentation
d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions
Sismique

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

- ▶ Une surface de réflectivité uniforme, vue de dessus, renvoie l'intensité lumineuse

$$I(\mathbf{p}) = I_0 \frac{\alpha + \langle \beta, \nabla u(\mathbf{p}) \rangle}{\sqrt{1 + \|\nabla u(\mathbf{p})\|^2}}$$

où $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la hauteur, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$ direction de la source lumineuse.

- ▶ Dans le cas d'une illumination verticale ($\alpha = 1, \beta = 0$)

$$\|\nabla u(\mathbf{p})\| = c(\mathbf{p}) := \sqrt{\left(\frac{I_0}{I(\mathbf{p})}\right)^2 - 1}$$

- ▶ Equation satisfaite par une fonction distance pour la métrique $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\dot{\mathbf{p}}) := c(\mathbf{p})\|\dot{\mathbf{p}}\|$.

- ▶ L'équation eikonale admet plusieurs solutions, et le principe de sélection de la solution de viscosité est ici arbitraire.
- ▶ En dehors de cas idéaux, une source d'information supplémentaire est requise: vue stéréo, capteur Kinect, multi illumination, ...

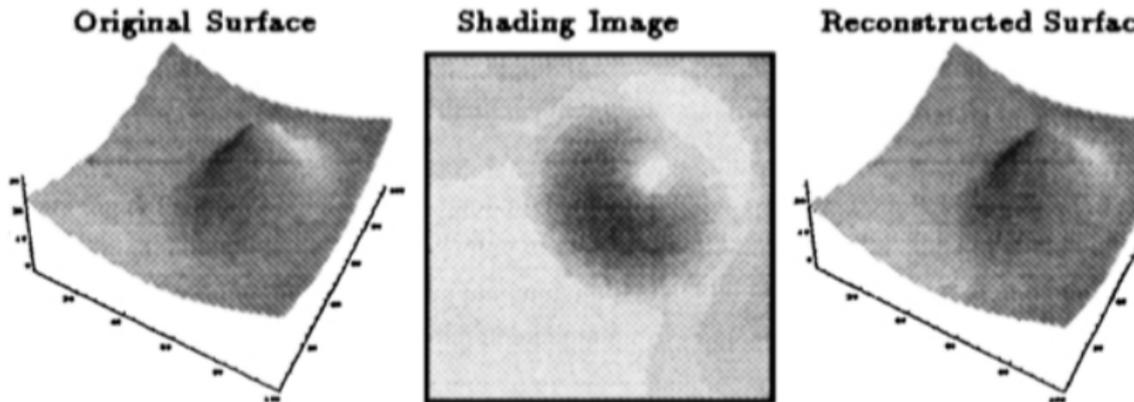


Figure: Reconstruction parfaite, Credit Kimmel 01'

Fast Marching Cours I

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement

Shape from shading

Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

- ▶ L'équation eikonale admet plusieurs solutions, et le principe de sélection de la solution de viscosité est ici arbitraire.
- ▶ En dehors de cas idéaux, une source d'information supplémentaire est requise: vue stéréo, capteur Kinect, multi illumination, ...



Figure: Stocks de minerais, Credit Getty images

- ▶ L'équation eikonale admet plusieurs solutions, et le principe de sélection de la solution de viscosité est ici arbitraire.
- ▶ En dehors de cas idéaux, une source d'information supplémentaire est requise: vue stéréo, capteur Kinect, multi illumination, ...

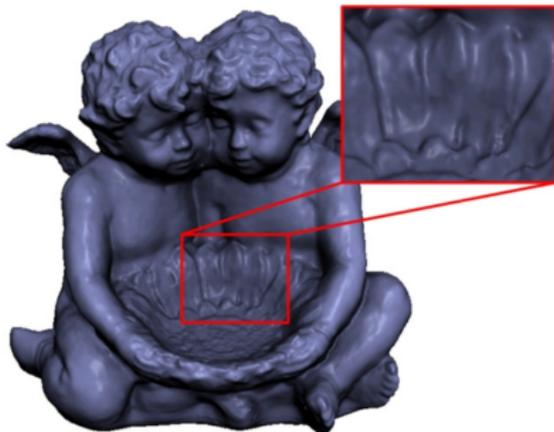


Figure: Reconstruction par vues stéréo+shading, Wu 11'

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading

Segmentation d'images

Géométries Isotropes

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions
Sismique

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading

Segmentation d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

- ▶ L'utilisation de chemins minimisant des énergies, sous diverses contraintes, est naturelle en segmentation d'image.

Méthodes de contours actifs

- ▶ L'utilisation de chemins minimisant des énergies, sous diverses contraintes, est naturelle en segmentation d'image.
- ▶ Le modèle de serpent de Kass et al, 88', associe une énergie interne régularisante, et une attache aux données.

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_0^T a \|\gamma''(t)\|^2 + b \|\gamma'(t)\|^2 + c(\gamma(t)) dt$$

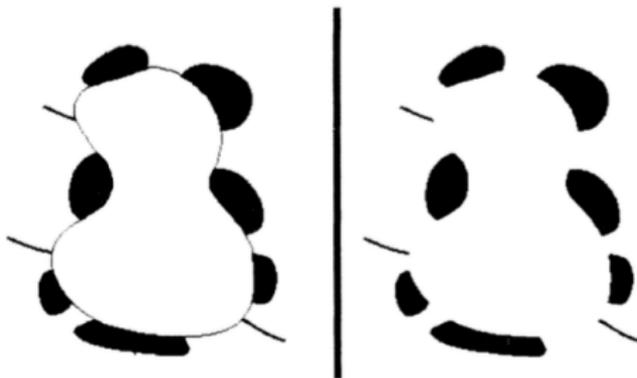


Figure: Credit Kass, 88

Méthodes de contours actifs

- ▶ L'utilisation de chemins minimisant des énergies, sous diverses contraintes, est naturelle en segmentation d'image.
- ▶ Le modèle de serpent de Kass et al, 88', associe une énergie interne régularisante, et une attache aux données.

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_0^T a \|\gamma''(t)\|^2 + b \|\gamma'(t)\|^2 + c(\gamma(t)) dt$$

- ▶ Son optimisation est difficile, car non-convexe, donnant lieu à de nombreux minimaux locaux.

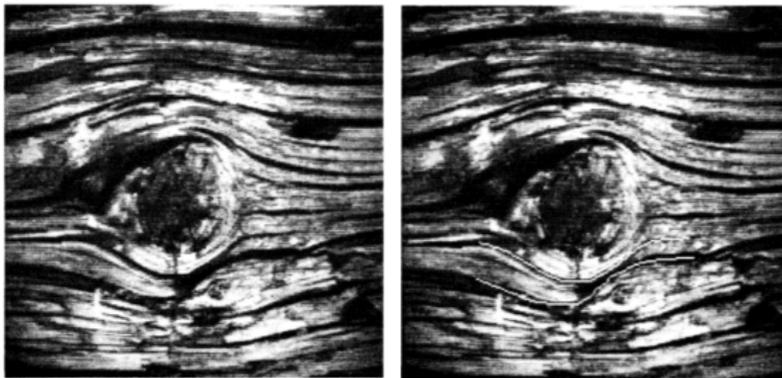


Figure: Trois minimiseurs locaux distincts. Credit Kass, 88

Méthodes de contours actifs

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading

Segmentation d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

- ▶ L'utilisation de chemins minimisant des énergies, sous diverses contraintes, est naturelle en segmentation d'image.
- ▶ Le modèle de serpent de Kass et al, 88', associe une énergie interne régularisante, et une attache aux données.

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_0^T a \|\gamma''(t)\|^2 + b \|\gamma'(t)\|^2 + c(\gamma(t)) dt$$

- ▶ Son optimisation est difficile, car non-convexe, donnant lieu à de nombreux minimaux locaux.

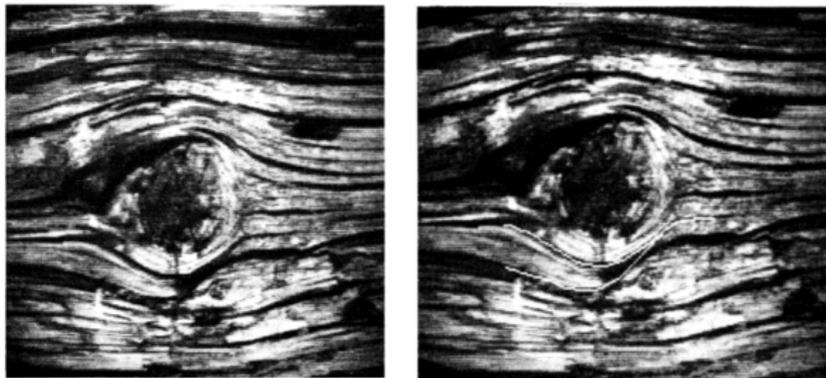


Figure: Trois minimiseurs locaux distincts. Credit Kass, 88

Méthodes de contours actifs

- ▶ L'utilisation de chemins minimisant des énergies, sous diverses contraintes, est naturelle en segmentation d'image.
- ▶ Le modèle de serpent de Kass et al, 88', associe une énergie interne régularisante, et une attache aux données.

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_0^T a \|\gamma''(t)\|^2 + b \|\gamma'(t)\|^2 + c(\gamma(t)) dt$$

- ▶ Son optimisation est difficile, car non-convexe, donnant lieu à de nombreux minimaux locaux.

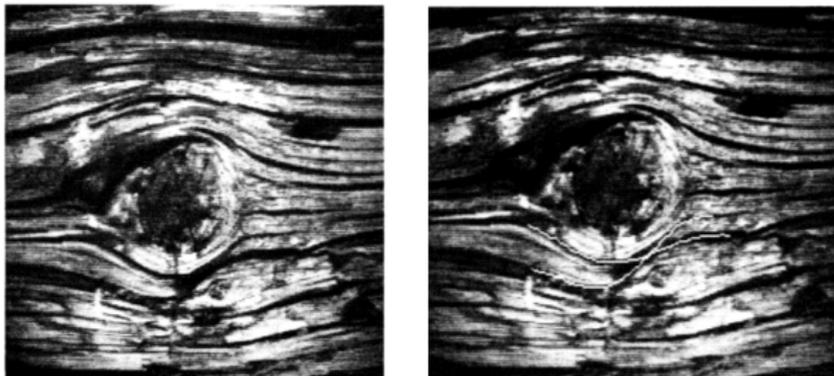


Figure: Trois minimiseurs locaux distincts. Credit Kass, 88

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading

Segmentation d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Modèle de Cohen et Kimmel

Cohen et Kimmel proposent un modèle d'énergie plus simple, pour lequel une optimisation globale est possible, à extrémités fixées.

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_0^T c(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Le coût $c : \bar{\Omega} \rightarrow]0, \infty[$ dépend de l'image traitée.

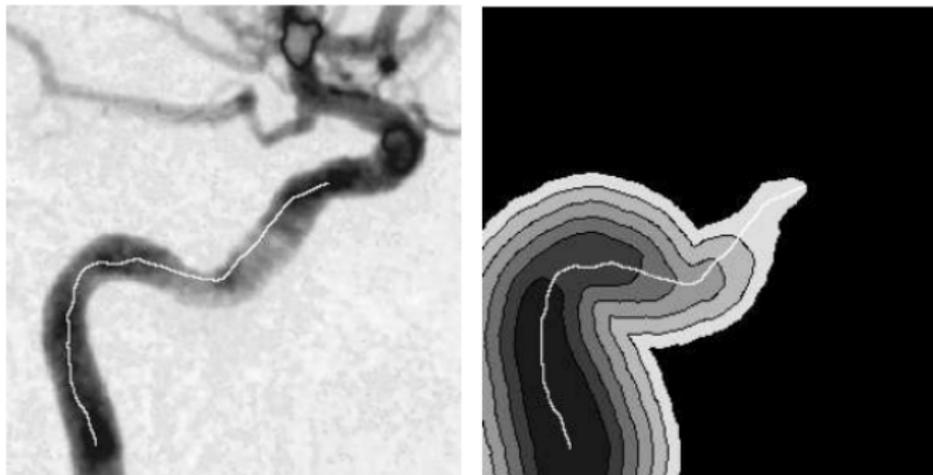


Figure: Credit L.Cohen

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading

Segmentation d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Modèle de Cohen et Kimmel

Cohen et Kimmel proposent un modèle d'énergie plus simple, pour lequel une optimisation globale est possible, à extrémités fixées.

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_0^T c(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Le coût $c : \bar{\Omega} \rightarrow]0, \infty[$ dépend de l'image traitée.

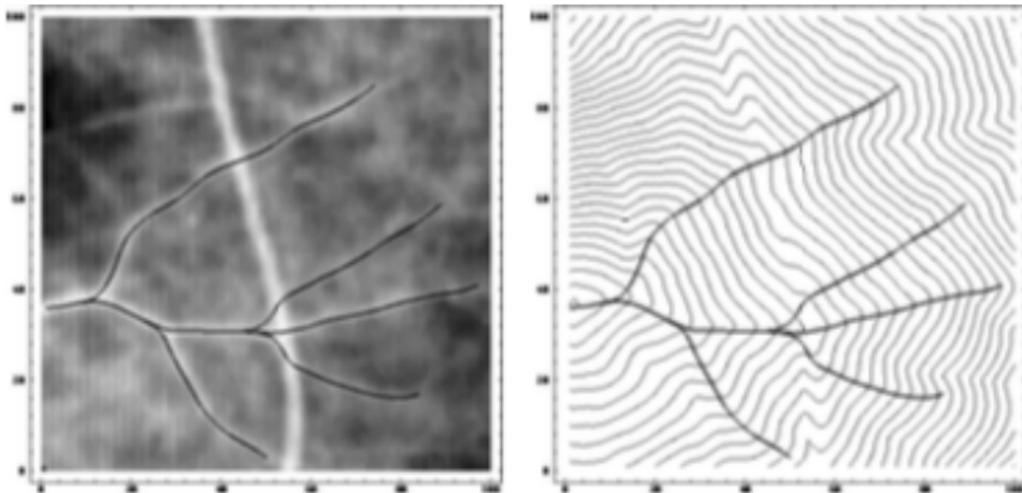


Figure: Credit L.Cohen

L'utilisation d'un paramètre supplémentaire abstrait η améliore les résultats.

$$\mathcal{E}(\gamma, \eta) := \int_0^1 c(\gamma(t), \eta(t)) \sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 + \eta'(t)^2} dt.$$

- Li and Yezzi 07. Radius lift $\eta(t) := r(t)$.

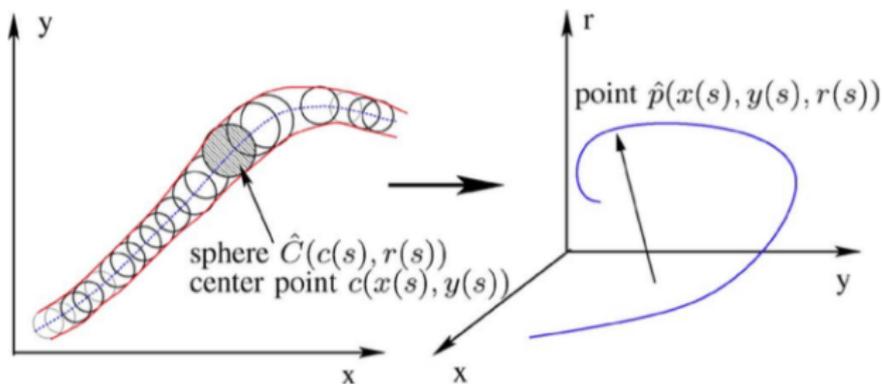


Figure: Radius lift. Credit: Li et al, 07'

L'utilisation d'un paramètre supplémentaire abstrait η améliore les résultats.

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

$$\mathcal{E}(\gamma, \eta) := \int_0^1 c(\gamma(t), \eta(t)) \sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 + \eta'(t)^2} dt.$$

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

- ▶ Li and Yezzi 07. Radius lift $\eta(t) := r(t)$.
- ▶ Pechaud et al, 09'. Orientation lift $\eta(t) := \theta(t)$.

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading

Segmentation d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

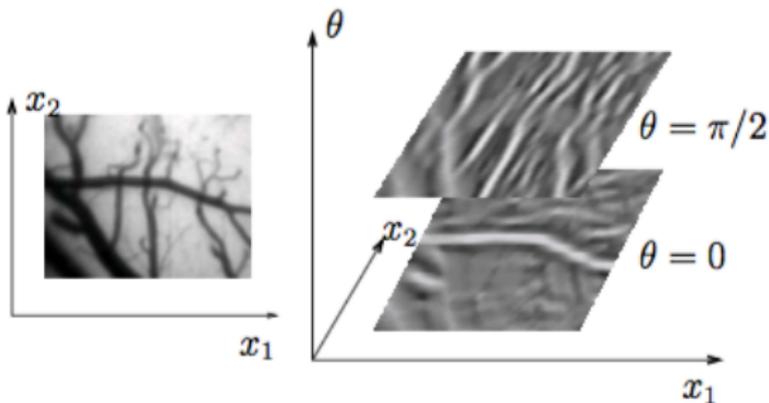


Figure: Orientation lift. Credit: Pechaud et al, 09'

L'utilisation d'un paramètre supplémentaire abstrait η améliore les résultats.

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

$$\mathcal{E}(\gamma, \eta) := \int_0^1 c(\gamma(t), \eta(t)) \sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 + \eta'(t)^2} dt.$$

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading

Segmentation d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

- ▶ Li and Yezzi 07. Radius lift $\eta(t) := r(t)$.
- ▶ Pechaud et al, 09'. Orientation lift $\eta(t) := \theta(t)$.
- ▶ Coherence lift $\eta(t) := I(t)$. (Niveau de gris.)

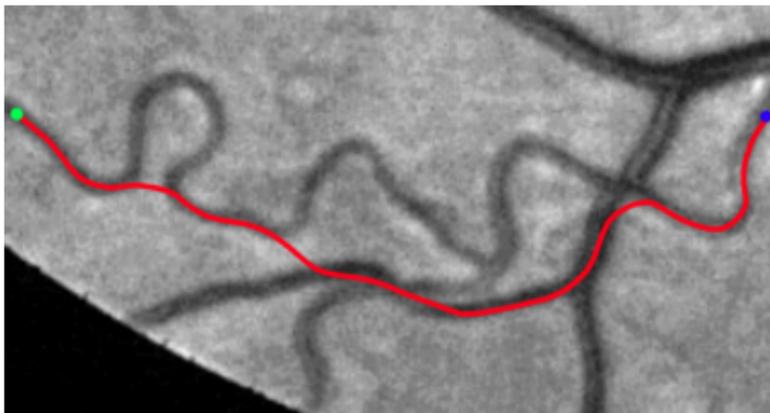


Figure: Coherence lift. Credit: Chen et al, 17'

L'utilisation d'un paramètre supplémentaire abstrait η améliore les résultats.

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

$$\mathcal{E}(\gamma, \eta) := \int_0^1 c(\gamma(t), \eta(t)) \sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 + \eta'(t)^2} dt.$$

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading

Segmentation d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

- ▶ Li and Yezzi 07. Radius lift $\eta(t) := r(t)$.
- ▶ Pechaud et al, 09'. Orientation lift $\eta(t) := \theta(t)$.
- ▶ Coherence lift $\eta(t) := I(t)$. (Niveau de gris.)

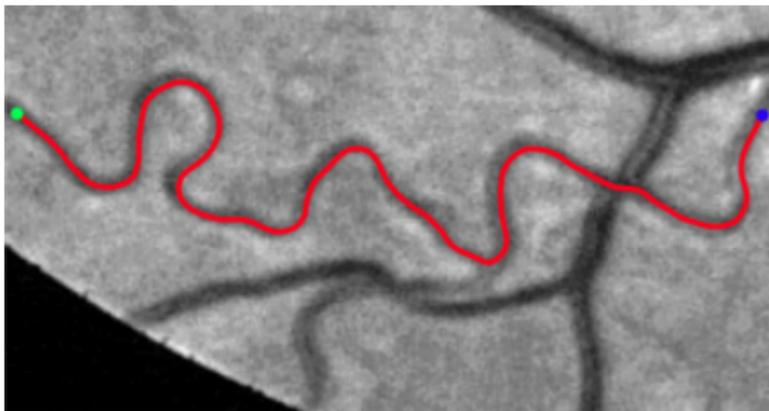


Figure: Coherence lift. Credit: Chen et al, 17'

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Géométries Isotropes

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions
Sismique

Une métrique Riemannienne est définie par un champ de tenseurs SDP, $\mathcal{M} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow S_d^{++}$,

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\dot{\mathbf{p}}) := \|\dot{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{p})}$$

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

- La condition d'angle aigu se généralise, à l'aide du produit scalaire intrinsèque (Sethian,03)

$$\langle \dot{\mathbf{p}}, \mathcal{M}(\mathbf{p})\dot{\mathbf{q}} \rangle \geq 0,$$

où $\mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} + \dot{\mathbf{q}}$ sont des sommets voisins de $V(\mathbf{p})$.

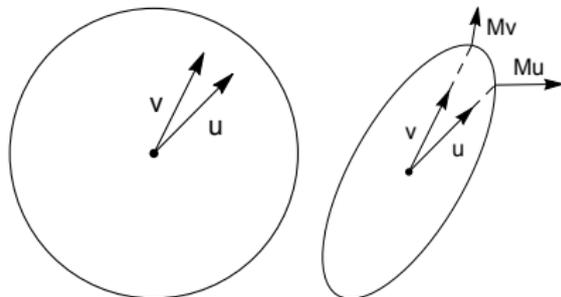
Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Une métrique Riemannienne est définie par un champ de tenseurs SDP, $\mathcal{M} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{S}_d^{++}$,

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\dot{\mathbf{p}}) := \|\dot{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{p})}$$

- ▶ La condition d'angle aigu se généralise, à l'aide du produit scalaire intrinsèque (Sethian,03)

$$\langle \dot{\mathbf{p}}, \mathcal{M}(\mathbf{p})\dot{\mathbf{q}} \rangle \geq 0,$$

où $\mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} + \dot{\mathbf{q}}$ sont des sommets voisins de $V(\mathbf{p})$.

- ▶ Pour des anisotropies modestes, un stencil fixe est envisageable

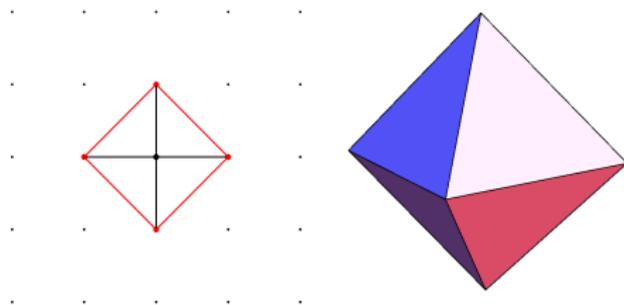


Figure: Métriques isotropes seulement

Une métrique Riemannienne est définie par un champ de tenseurs SDP, $\mathcal{M} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{S}_d^{++}$,

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\dot{\mathbf{p}}) := \|\dot{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{p})}$$

- ▶ La condition d'angle aigu se généralise, à l'aide du produit scalaire intrinsèque (Sethian,03)

$$\langle \dot{\mathbf{p}}, \mathcal{M}(\mathbf{p})\dot{\mathbf{q}} \rangle \geq 0,$$

où $\mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} + \dot{\mathbf{q}}$ sont des sommets voisins de $V(\mathbf{p})$.

- ▶ Pour des anisotropies modestes, un stencil fixe est envisageable

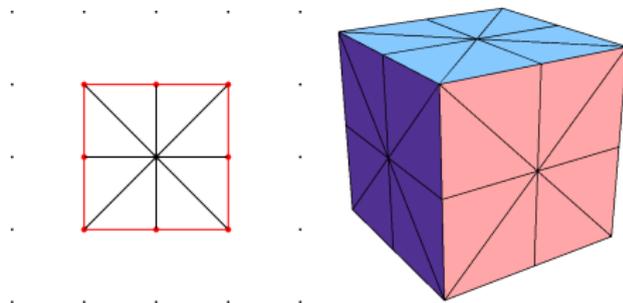


Figure: $\mu(M) := \sqrt{\|M\| \|M^{-1}\|}$ borné par $1 + \sqrt{2}$ (2D), ou $(\sqrt{3} + 1)/2$ (3D)

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Soit $\|e\|_M := \sqrt{\langle e, Me \rangle}$, pour $e \in \mathbb{R}^d$, $M \in S_d^{++}$.

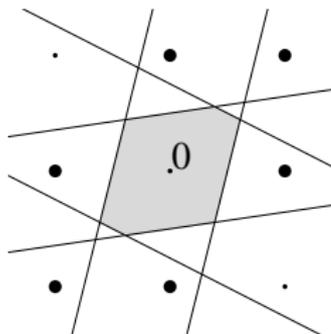
Definition (Cellule de Voronoi et facettes)

Pour toute matrice $M \in S_d^+$, définissons

$$\text{Vor}(M) := \{g \in \mathbb{R}^d; \forall e \in \mathbb{Z}^d, \|g\|_M \leq \|g - e\|_M\},$$

$$\text{Vor}(M; e) := \{g \in \text{Vor}(M); \|g\|_M = \|g - e\|_M\}.$$

e est un vecteur de Voronoi $\Leftrightarrow \text{Vor}(M, e) \neq \emptyset$.



Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

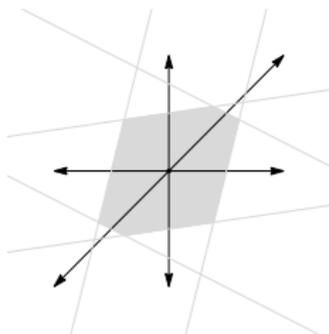
Soit $\|e\|_M := \sqrt{\langle e, Me \rangle}$, pour $e \in \mathbb{R}^d$, $M \in S_d^{++}$.

Definition (Cellule de Voronoi et facettes)

Pour toute matrice $M \in S_d^+$, définissons

$$\begin{aligned}\text{Vor}(M) &:= \{g \in \mathbb{R}^d; \forall e \in \mathbb{Z}^d, \|g\|_M \leq \|g - e\|_M\}, \\ \text{Vor}(M; e) &:= \{g \in \text{Vor}(M); \|g\|_M = \|g - e\|_M\}.\end{aligned}$$

e est un vecteur de Voronoi $\Leftrightarrow \text{Vor}(M, e) \neq \emptyset$.



Soit $\|e\|_M := \sqrt{\langle e, Me \rangle}$, pour $e \in \mathbb{R}^d$, $M \in S_d^{++}$.

Definition (Cellule de Voronoi et facettes)

Pour toute matrice $M \in S_d^+$, définissons

$$\text{Vor}(M) := \{g \in \mathbb{R}^d; \forall e \in \mathbb{Z}^d, \|g\|_M \leq \|g - e\|_M\},$$

$$\text{Vor}(M; e) := \{g \in \text{Vor}(M); \|g\|_M = \|g - e\|_M\}.$$

e est un vecteur de Voronoi $\Leftrightarrow \text{Vor}(M, e) \neq \emptyset$.

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

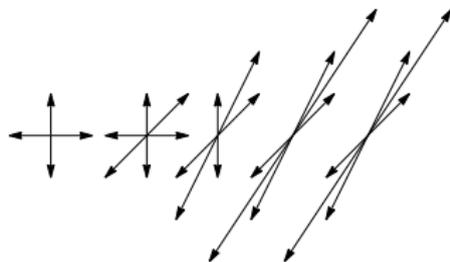
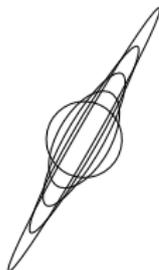
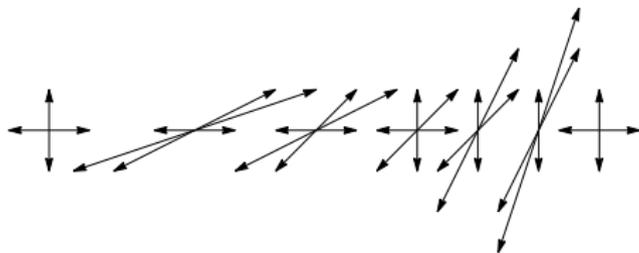
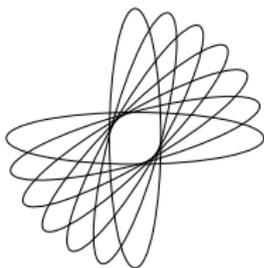
Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique



Soit $\|e\|_M := \sqrt{\langle e, Me \rangle}$, pour $e \in \mathbb{R}^d$, $M \in S_d^{++}$.

Definition (Cellule de Voronoi et facettes)

Pour toute matrice $M \in S_d^+$, définissons

$$\text{Vor}(M) := \{g \in \mathbb{R}^d; \forall e \in \mathbb{Z}^d, \|g\|_M \leq \|g - e\|_M\},$$

$$\text{Vor}(M; e) := \{g \in \text{Vor}(M); \|g\|_M = \|g - e\|_M\}.$$

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

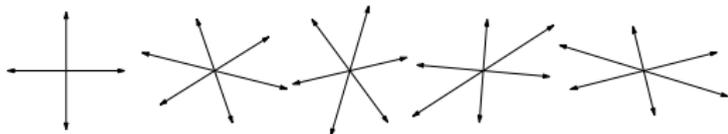
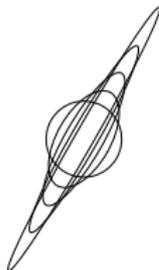
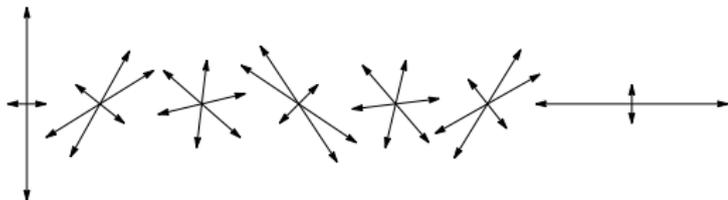
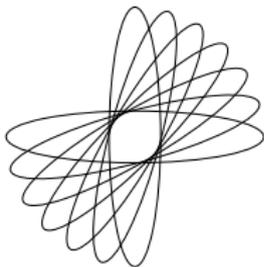
Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Coordonnées transformées par $M^{\frac{1}{2}}$.



Proposition (Angle aigu des vecteurs de Voronoi voisins)

Si $\text{Vor}(M; e) \cap \text{Vor}(M; f) \neq \emptyset$, alors $\langle e, Mf \rangle \geq 0$.

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

 J.-M. M, *Anisotropic Fast Marching on Cartesian Grids, using Lattice Basis Reduction*, SINUM, 2014.

Proposition (Angle aigu des vecteurs de Voronoi voisins)

Si $\text{Vor}(M; e) \cap \text{Vor}(M; f) \neq \emptyset$, alors $\langle e, Mf \rangle \geq 0$.

Indeed, let $p \in \text{Vor}(M; e) \cap \text{Vor}(M; f)$. Then

$$\|p\|_M = \|p - e\|_M = \|p - f\|_M \leq \|p - (e + f)\|_M.$$

$$0 \leq \|p - (e + f)\|_M^2 - \|p - e\|_M^2 - \|p - f\|_M^2 + \|p\|_M^2 = 2\langle e, Mf \rangle.$$

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

 J.-M. M, *Anisotropic Fast Marching on Cartesian Grids, using Lattice Basis Reduction*, SINUM, 2014.

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Proposition (Angle aigu des vecteurs de Voronoi voisins)

Si $\text{Vor}(M; e) \cap \text{Vor}(M; f) \neq \emptyset$, alors $\langle e, Mf \rangle \geq 0$.

Indeed, let $p \in \text{Vor}(M; e) \cap \text{Vor}(M; f)$. Then

$$\|p\|_M = \|p - e\|_M = \|p - f\|_M \leq \|p - (e + f)\|_M.$$

$$0 \leq \|p - (e + f)\|_M^2 - \|p - e\|_M^2 - \|p - f\|_M^2 + \|p\|_M^2 = 2\langle e, Mf \rangle.$$

Voisinages aigus pour métriques Riemanniennes, sur \mathbb{Z}^d

Supposons $\mathcal{F}_p(\dot{p}) = \|\dot{p}\|_{\mathcal{M}(p)}$, et $X = \Omega \cap h\mathbb{Z}^d$.

Définir $V(p)$ par l'ensemble des $\mathcal{M}(p)$ vecteurs de Voronoi, avec la topologie duale à $\text{Vor}(\mathcal{M}(p))$.

 J.-M. M, *Anisotropic Fast Marching on Cartesian Grids, using Lattice Basis Reduction*, SINUM, 2014.

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Proposition (Angle aigu des vecteurs de Voronoi voisins)

Si $\text{Vor}(M; e) \cap \text{Vor}(M; f) \neq \emptyset$, alors $\langle e, Mf \rangle \geq 0$.Indeed, let $p \in \text{Vor}(M; e) \cap \text{Vor}(M; f)$. Then

$$\|p\|_M = \|p - e\|_M = \|p - f\|_M \leq \|p - (e + f)\|_M.$$

$$0 \leq \|p - (e + f)\|_M^2 - \|p - e\|_M^2 - \|p - f\|_M^2 + \|p\|_M^2 = 2\langle e, Mf \rangle.$$

Voisinages aigus pour métriques Riemanniennes, sur \mathbb{Z}^d Supposons $\mathcal{F}_p(\dot{p}) = \|\dot{p}\|_{\mathcal{M}(p)}$, et $X = \Omega \cap h\mathbb{Z}^d$.Définir $V(p)$ par l'ensemble des $\mathcal{M}(p)$ vecteurs de Voronoi, avec la topologie duale à $\text{Vor}(\mathcal{M}(p))$.

Théorème (Optimalité de ces stencils, en 2D)

Les stencils fondés sur Voronoi sont les plus petits, au sens de l'inclusion de l'enveloppe convexe, à satisfaire la condition d'angle aigu.

 J.-M. M, *Minimal Stencils for Monotony or Causality Preserving Discretizations of Anisotropic PDEs*, SINUM, 2016.

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

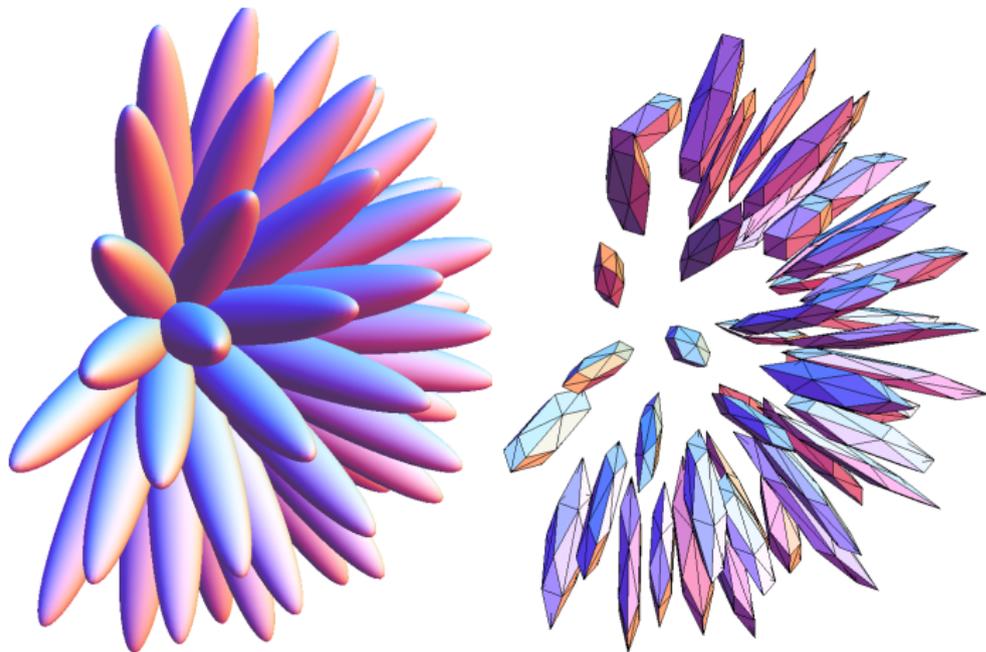


Figure: Métrique en aiguille, voisinages aigus

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

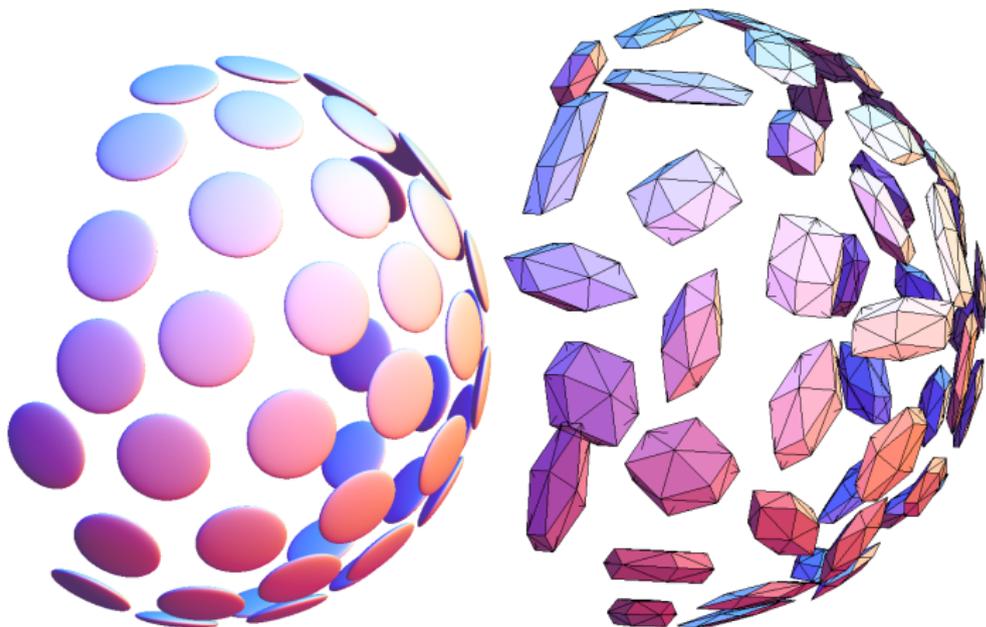


Figure: Métrique en assiette, voisinages aigus

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Géométries Isotropes

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions
Sismique

Finsler

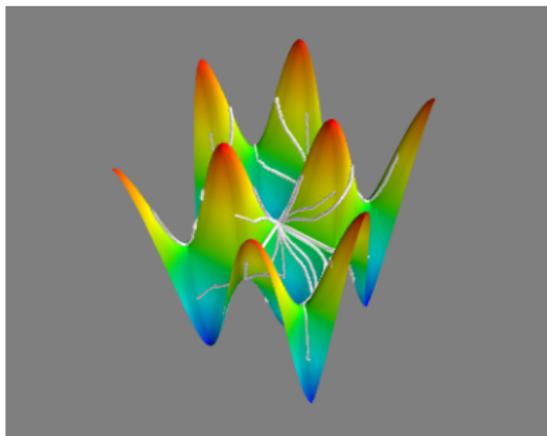
Energies
associées à des
régions
Sismique

- ▶ La métrique euclidienne sur une surface plongée paramétrée $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, correspond à une métrique Riemannienne sur Ω

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}) = J(\mathbf{p})^T J(\mathbf{p}), \quad J(\mathbf{p}) := dg(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} \in \Omega.$$

- ▶ Cas particulier des cartes de hauteur

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}) = \text{Id} + \nabla h(\mathbf{p}) \nabla h(\mathbf{p})^T, \quad \text{où } g(\mathbf{p}) := (\mathbf{p}, h(\mathbf{p})).$$



Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

**Distance de
Fisher-Rao**

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Géométries Isotropes

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions
Sismique

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

**Distance de
Fisher-Rao**

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Soit X un espace mesuré, et $p(x; \theta)$ une famille de densités de probabilité sur X paramétrées par $\theta \in \Theta$.

- ▶ La divergence de Kullback-Liebler mesure l'entropie relative des distributions associées à deux paramètres

$$KL(\theta || \varphi) = E_{\theta}[\ln(p_{\theta}/p_{\varphi})] = \int_X \ln\left(\frac{p(x; \theta)}{p(x; \varphi)}\right) p(x; \theta) dx$$

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Soit X un espace mesuré, et $p(x; \theta)$ une famille de densités de probabilité sur X paramétrées par $\theta \in \Theta$.

- ▶ La divergence de Kullback-Liebler mesure l'entropie relative des distributions associées à deux paramètres

$$KL(\theta || \varphi) = E_{\theta}[\ln(p_{\theta}/p_{\varphi})] = \int_X \ln\left(\frac{p(x; \theta)}{p(x; \varphi)}\right) p(x; \theta) dx$$

- ▶ Son expansion locale définit une métrique Riemannienne

$$KL(\theta || \varphi) = \langle (\varphi - \theta), \mathcal{M}(\theta)(\varphi - \theta) \rangle + o(\|\varphi - \theta\|^2),$$

et donc une distance associée sur Θ , dite de Fisher-Rao.

- We fit the GPD $\phi(x; \xi, \sigma) = (1 + \xi x/\sigma)^{-1/\xi - 1}/\sigma$, to NASDAQ 100 stocks and plot geodesics between them and a single stock AAPL.

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface

Distance de Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

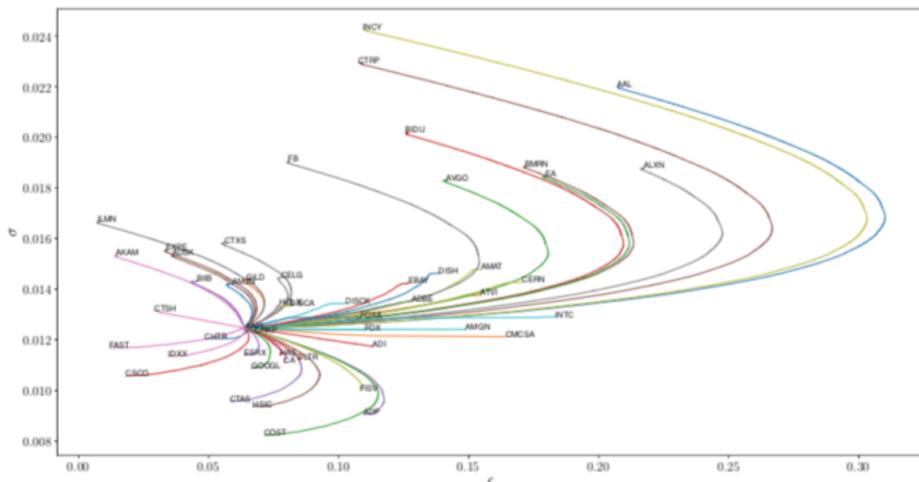


Figure: Credit: S. Taylor, 18

Fast
Marching
Cours I

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Géométries Isotropes

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions
Sismique

Une métrique Finslerienne \mathcal{F} définit en chaque point une norme asymétrique.

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

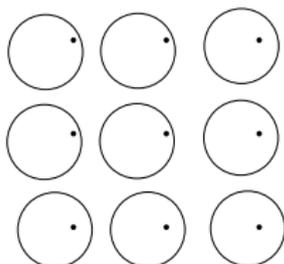
Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

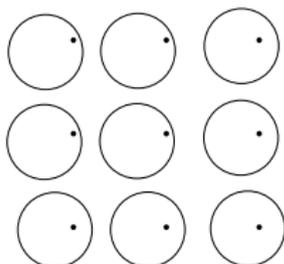


Une métrique Finslerienne \mathcal{F} définit en chaque point une norme asymétrique.

- Exemple: métrique de Rander

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\dot{\mathbf{p}}) := \|\dot{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{p})} + \langle \hat{\eta}(\mathbf{p}), \dot{\mathbf{p}} \rangle,$$

sous réserve de $\|\hat{\eta}(\mathbf{p})\|_{\mathcal{M}(\mathbf{p})}^{-1} < 1$.



Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

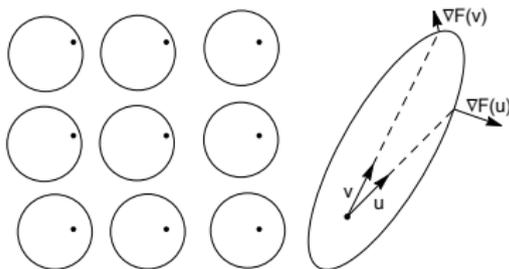
Energies
associées à des
régions
Sismique

Une métrique Finslerienne \mathcal{F} définit en chaque point une norme asymétrique.

- ▶ Exemple: métrique de Randér

$$\mathcal{F}_p(\dot{\mathbf{p}}) := \|\dot{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{M}(p)} + \langle \hat{\eta}(p), \dot{\mathbf{p}} \rangle,$$

sous réserve de $\|\hat{\eta}(p)\|_{\mathcal{M}(p)^{-1}} < 1$.



- ▶ La condition d'angle aigu, garantissant la causalité, se généralise (Vladimirsky, 08):

$$\langle \dot{\mathbf{p}}, \nabla F(\dot{\mathbf{q}}) \rangle \geq 0, \quad \langle \dot{\mathbf{q}}, \nabla F(\dot{\mathbf{q}}) \rangle \geq 0,$$

où $F = \mathcal{F}_p$, et $\mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{p} + \dot{\mathbf{q}}$ sommets voisins de $V(\mathbf{p})$.

Calcul

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Distance

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Riemann

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Finsler

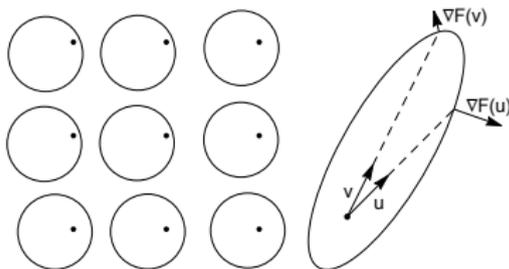
Energies associées à des régions
Sismique

Une métrique Finslerienne \mathcal{F} définit en chaque point une norme asymétrique.

- ▶ Exemple: métrique de Randér

$$\mathcal{F}_p(\dot{\mathbf{p}}) := \|\dot{\mathbf{p}}\|_{\mathcal{M}(p)} + \langle \hat{\eta}(p), \dot{\mathbf{p}} \rangle,$$

sous réserve de $\|\hat{\eta}(p)\|_{\mathcal{M}(p)^{-1}} < 1$.



- ▶ La condition d'angle aigu, garantissant la causalité, se généralise (Vladimirsky, 08):

$$\langle \dot{\mathbf{p}}, \nabla F(\dot{\mathbf{q}}) \rangle \geq 0, \quad \langle \dot{\mathbf{q}}, \nabla F(\dot{\mathbf{q}}) \rangle \geq 0,$$

où $F = \mathcal{F}_p$, et $\mathbf{p} + \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{p} + \dot{\mathbf{q}}$ sommets voisins de $V(\mathbf{p})$.

- ▶ Constructions de voisinages aigus: Sethian 03, Alton 12, ...

Calcul

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Distance

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Riemann

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Finsler

Energies associées à des régions
Sismique

Fast-Marching using Adaptive Stencil Refinement

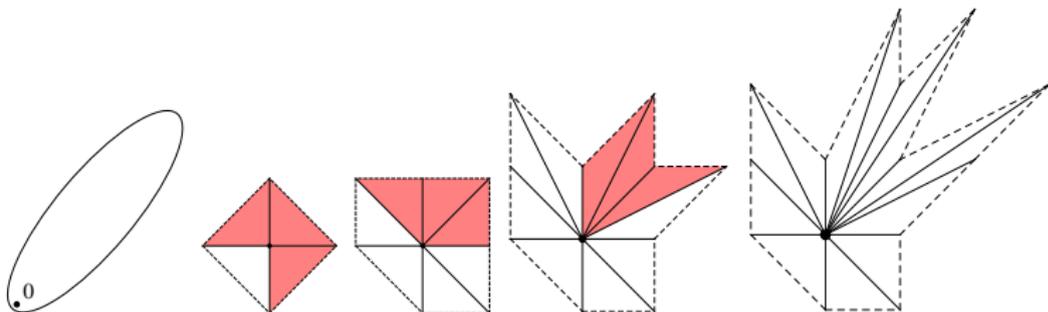
- Raffinement itératif du stencil jusqu'à obtenir la propriété d'angle aigu. (FM-ASR scheme, sur \mathbb{Z}^2)

Calcul

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Distance

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images



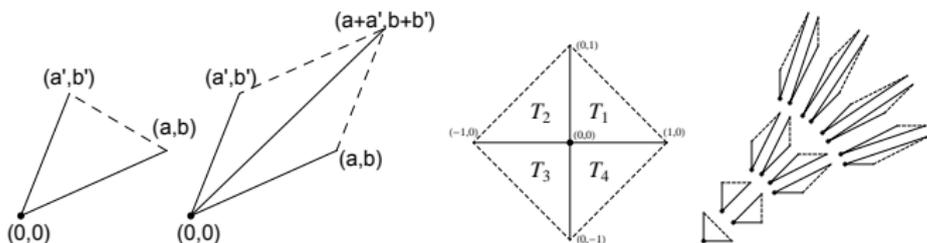
Riemann

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

- La procédure de raffinement exploite l'additivité de la grille.

Finsler

Energies associées à des régions
Sismique



Fast-Marching using Adaptive Stencil Refinement

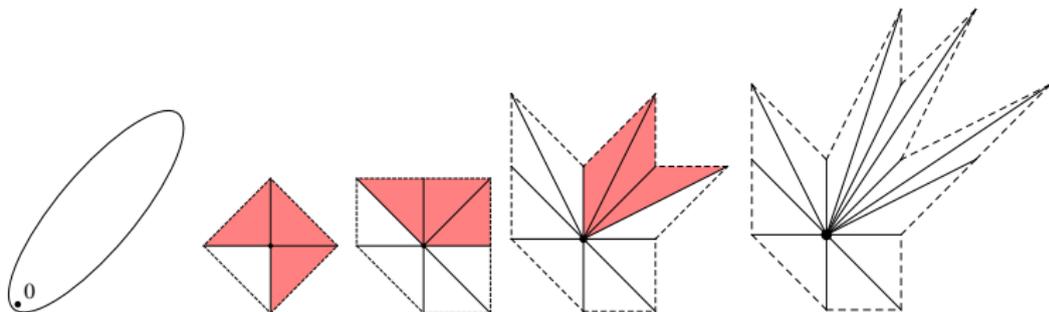
- Raffinement itératif du stencil jusqu'à obtenir la propriété d'angle aigu. (FM-ASR scheme, sur \mathbb{Z}^2)

Calcul

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Distance

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images



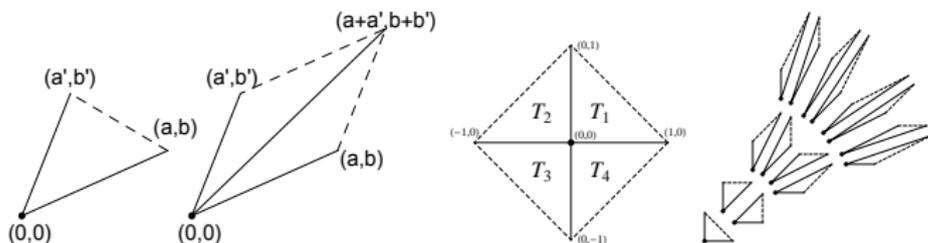
Riemann

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

- La procédure de raffinement exploite l'additivité de la grille.

Finsler

Energies associées à des régions
Sismique



Fast-Marching using Adaptive Stencil Refinement

- Raffinement itératif du stencil jusqu'à obtenir la propriété d'angle aigu. (FM-ASR scheme, sur \mathbb{Z}^2)

Calcul

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Distance

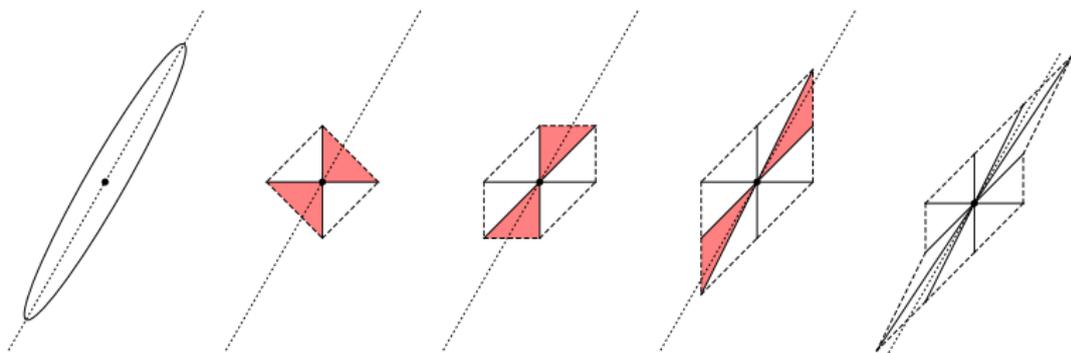
Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Riemann

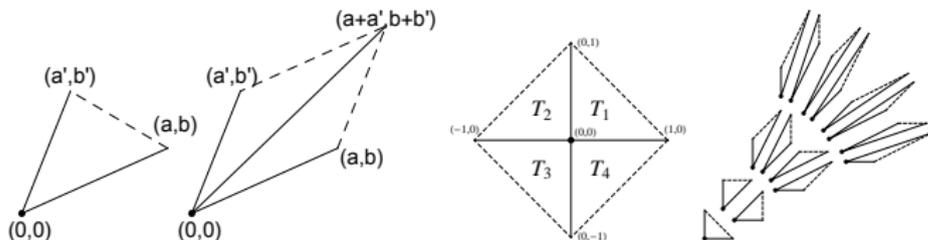
Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Finsler

Energies associées à des régions
Sismique



- La procédure de raffinement exploite l'additivité de la grille.



L'arbre de Stern-Brocot

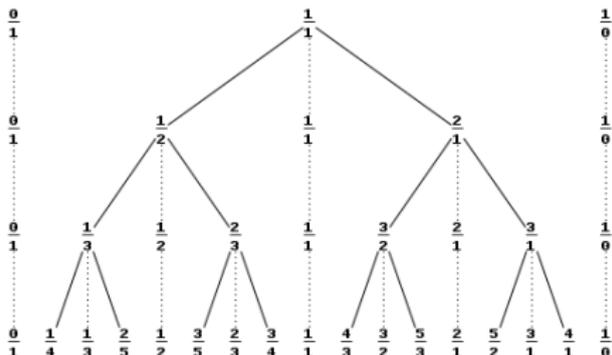
Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images



$$\frac{a}{b} \quad \frac{A}{B} = \frac{a+a'}{b+b'} \quad \frac{a'}{b'}$$

$$\vdots \quad \swarrow \quad \vdots \quad \searrow \quad \vdots$$

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a+A}{b+B} \quad \frac{A}{B} \quad \frac{A+a'}{B+b'} \quad \frac{a'}{b'}$$

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

La $(n+1)$ -ième ligne s'obtient par l'insertion de $\frac{a+a'}{b+b'}$ entre les éléments consécutifs $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ de la n -ième ligne.

- ▶ Chaque rationnel positif apparaît une unique fois, sous forme irréductible.
- ▶ Objet arithmétique bien étudié, utilisé pour l'approximation rationnelle.

Fast Marching Cours I

Jean-Marie Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Distance

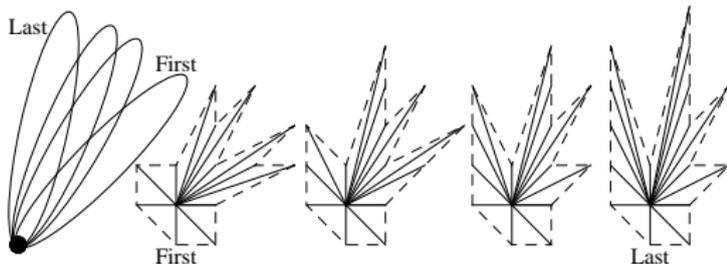
Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Riemann

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

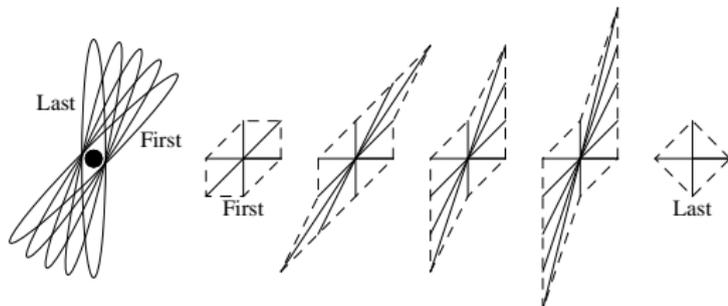
Finsler

Energies associées à des régions
Sismique



Context: F norme asymétrique sur \mathbb{R}^2 , $\mathcal{T}(F)$ le stencil FM-ASR

$$\mu(F) := \max_{|u|=|v|=1} \frac{F(u)}{F(v)}.$$



Context: F norme asymétrique sur \mathbb{R}^2 , $\mathcal{T}(F)$ le stencil FM-ASR

$$\mu(F) := \max_{|u|=|v|=1} \frac{F(u)}{F(v)}.$$

Theorem (Cardinalité du stencil, pire cas et moyenne)

Pour toute norme asymétrique F sur \mathbb{R}^2 , en notant R_θ la rotation d'angle θ , on a $\#\mathcal{T}(F) \leq C\mu \ln \mu$, and

$$\int_0^{2\pi} \#\mathcal{T}(F \circ R_\theta) d\theta \leq C \ln^3 \mu$$

où $\mu := \max\{2, \mu(F)\}$, et C est une constante absolue.

Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Géométries Isotropes

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions
Sismique

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

Segmentation de régions par géodésiques de Rander

Définissons pour toute région $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'énergie

$$\mathcal{E}(\Omega) := \int_{\Omega} f(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)dx.$$

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

**Energies
associées à des
régions**
Sismique

► Travail en commun avec Laurent Cohen, Da Chen.

Segmentation de régions par géodésiques de Rander

Définissons pour toute région $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'énergie

$$\mathcal{E}(\Omega) := \int_{\Omega} f(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)dx.$$

Supposons $f = \operatorname{div} w$, alors on peut reformuler

$$\mathcal{E}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} (\langle w(x), n(x) \rangle + g(x))dx = \int_0^1 \mathcal{F}_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt,$$

où $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation directe de $\partial\Omega$, et

$$\mathcal{F}_x(v) := g(x)\|v\| + \langle w(x)^\perp, v \rangle.$$

► Travail en commun avec Laurent Cohen, Da Chen.

Segmentation de régions par géodésiques de Rander

Définissons pour toute région $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'énergie

$$\mathcal{E}(\Omega) := \int_{\Omega} f(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)dx.$$

Supposons $f = \operatorname{div} w$, alors on peut reformuler

$$\mathcal{E}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} (\langle w(x), n(x) \rangle + g(x))dx = \int_0^1 \mathcal{F}_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt,$$

où $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation directe de $\partial\Omega$, et

$$\mathcal{F}_x(v) := g(x)\|v\| + \langle w(x)^\perp, v \rangle.$$

► Métrique de *Rander*, pourvu que $|w(x)| < g(x)$, $\forall x$.

► Travail en commun avec Laurent Cohen, Da Chen.

Segmentation de régions par géodésiques de Rander

Définissons pour toute région $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'énergie

$$\mathcal{E}(\Omega) := \int_{\Omega} f(x)dx + \int_{\partial\Omega} g(x)dx.$$

Supposons $f = \operatorname{div} w$, alors on peut reformuler

$$\mathcal{E}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} (\langle w(x), n(x) \rangle + g(x))dx = \int_0^1 \mathcal{F}_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt,$$

où $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation directe de $\partial\Omega$, et

$$\mathcal{F}_x(v) := g(x)\|v\| + \langle w(x)^\perp, v \rangle.$$

- ▶ Métrique de *Rander*, pourvu que $|w(x)| < g(x)$, $\forall x$.
- ▶ Ω est (localement) optimal ssi $\partial\Omega$ est une geodesique.
- ▶ Travail en commun avec Laurent Cohen, Da Chen.

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

- ▶ Calculer le champ w en résolvant une équation elliptique:

$$\Delta p = f \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(w) = f \text{ where } w = \nabla p.$$

- ▶ Extraire la géodésique minimisante de Rander, entre des points connus du bord.



Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

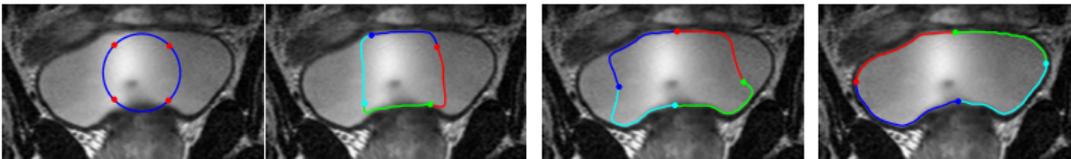
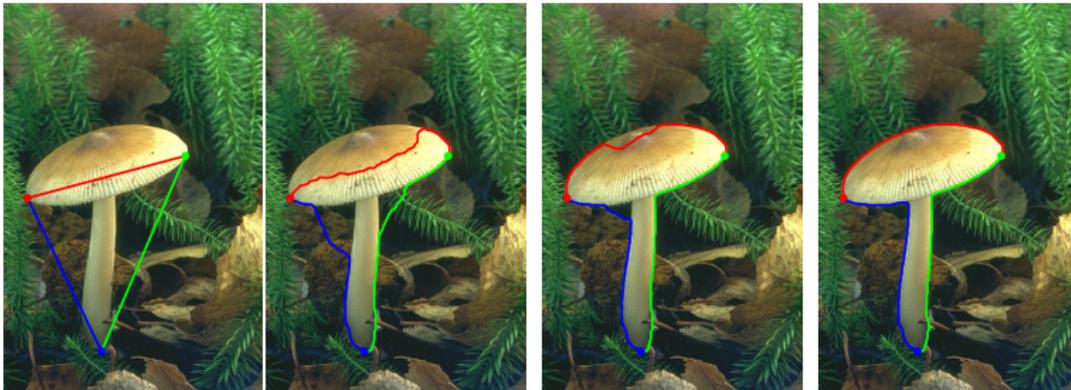
Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

- ▶ Calculer le champ w en résolvant une équation elliptique:

$$\Delta p = f \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(w) = f \text{ where } w = \nabla p.$$

- ▶ Extraire la géodésique minimisante de Rander, entre des points connus du bord.
- ▶ La méthode est en fait itérative, à cause de la contrainte $|w| < g$, et pour accepter des points de bord approchés.



Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

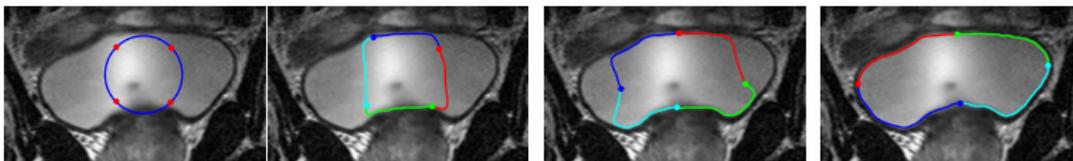
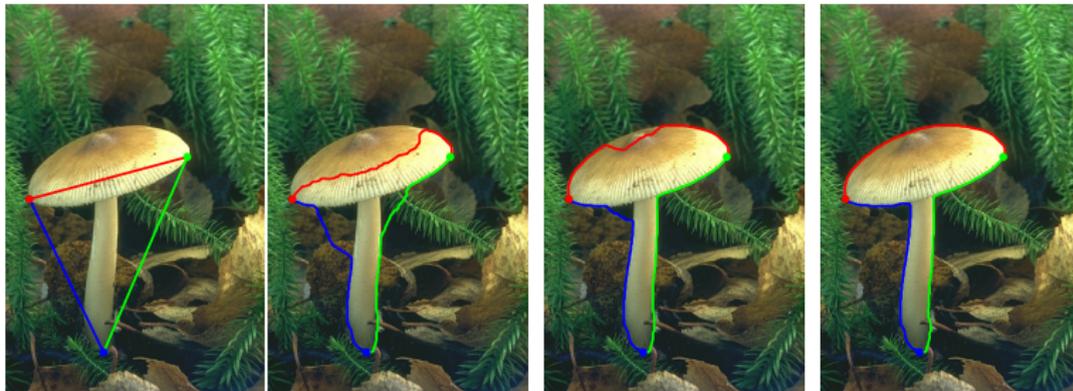
Finsler

Energies
associées à des
régions
Sismique

- ▶ Calculer le champ w en résolvant une équation elliptique:

$$\Delta p = f \text{ on } U \supseteq \partial\Omega \Rightarrow \operatorname{div}(w) = f \text{ where } w = \nabla p.$$

- ▶ Extraire la géodésique minimisante de Rander, entre des points connus du bord.
- ▶ La méthode est en fait itérative, à cause de la contrainte $|w| < g$, et pour accepter des points de bord approchés.



Calcul de distances et de chemins minimaux

Le cas des graphes
Schémas semi-Lagrangiens

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

Sismique

Géométries Isotropes

Planification de mouvement
Shape from shading
Segmentation d'images

Géométries Riemanniennes

Chemins minimaux sur une surface
Distance de Fisher-Rao

Géométries Finsleriennes

Energies associées à des régions
Sismique

Reconstruction du milieu souterrain

- ▶ Les séismes, ou détonations de charges, causent des ondes mécaniques de déformation du sol.
- ▶ Leur enregistrement, et notamment la détection du temps de première arrivée, permet de reconstruire le milieu souterrain - par comparaison avec la simulation numérique.
- ▶ Les ondes de compression sont plus rapides que les modes transverses.

Jean-Marie
Mirebeau¹,
Da Chen²

Calcul

Le cas des
graphes
Schémas
semi-Lagrangiens

Distance

Planification de
mouvement
Shape from
shading
Segmentation
d'images

Riemann

Chemins
minimaux sur une
surface
Distance de
Fisher-Rao

Finsler

Energies
associées à des
régions

Sismique

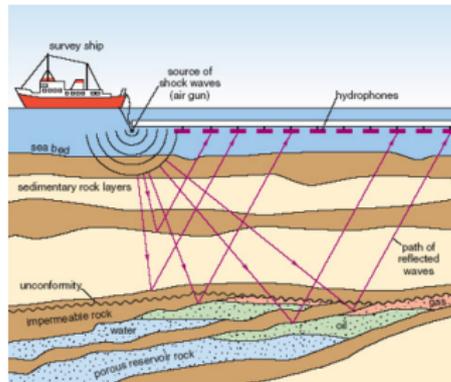


Figure: Credit: Petropedia

- Dans une approximation haute fréquence, elles suivent des géodésiques pour la métrique (modèle simplifié 2D)

$$\mathcal{F}_{(x,z)}(\dot{x}, \dot{z}) := \sup\{\langle (\hat{x}, \hat{z}), R_\theta(\dot{x}, \dot{z}) \rangle; \alpha \hat{x}^2 + \beta \hat{z}^2 + \gamma \hat{x}^2 \hat{z}^2 \leq 1\},$$

où l'inclinaison θ , et les paramètres d'anisotropie α, β, γ dépendent du point courant (x, z) .

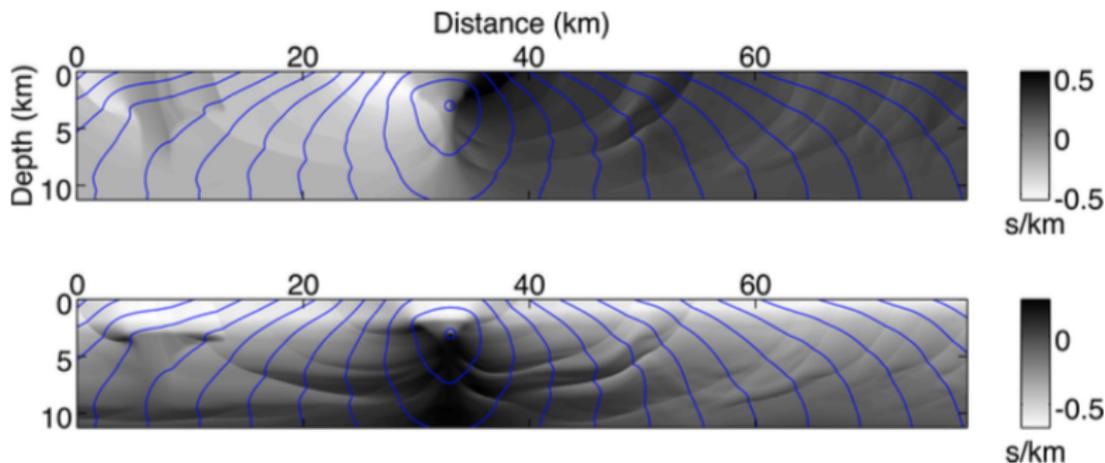


Figure: Temps d'arrivée de l'onde de compression: lignes de niveau (bleus), dérivées en x (haut) et z (bas). Le Bouteiller, 17', avec une méthode de Galerkin discontinue.